FIȘĂ DE LUCRU · CLASA A XI-A · MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Operații cu limite de șiruri

Operații cu șiruri convergente · Calcule cu ±∞ · Cazuri de nedeterminare · Polinoame și rapoarte · Exponențiale · Radicali · Sume

Întrebarea fișei: Cum calculezi limita unui șir scris cu sume, produse, câturi, puteri și radicali și ce faci când regulile de calcul nu dau răspunsul?

PĂRȚILE 1–2	PARTEA 3	PĂRȚILE 4–7	PARTEA 8
Reguli de calcul	Cazuri de nedeterminare	Limite de bază, polinoame, radicali	Sume, șiruri mărginite

0 Pornim de la ce știi

Trei verificări rapide. Dacă una dintre ele îți ridică probleme, notează-o: la ea revii prima.

1. Completează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \cdots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \cdots$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \cdots$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \cdots$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \cdots$

2. Dă factor comun forțat: $3n^2 - 5n + 2 = n^2(\dots)$ și $3^n + 2^n = 3^n(\dots)$.

3. Arată că $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

I Teorie pe scurt

Întâi regulile de calcul și cazurile în care ele nu se aplică. Apoi, pentru fiecare tip de șir, metoda pas cu pas (în chenarul gros) și exemple rezolvate. La final găsești schema recapitulativă și firul logic.

1. Operații cu șiruri convergente Partea 1

TEOREMĂ

Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

- **suma și diferența:** $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
- **produsul:** $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$; în particular $\lambda a_n \to \lambda a$, pentru $\lambda \in \mathbb{R}$;
- **câtul:** $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, dacă $b \neq 0$;
- **puterea:** $a_n^{b_n} \to a^b$, dacă $a_n > 0$ și $a > 0$;
- **radicalul:** $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ (cu $a_n \geq 0$, dacă k este par);
- **modulul:** $|a_n| \to |a|$.

Pe scurt: limita „trece” prin operații, atunci când rezultatul are sens. Regulile se folosesc fără demonstrație.

EXEMPLUL 1 · ȘIRURI CONVERGENTE

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n^2}\right) = 3 \cdot 5 = 15$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{2+\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (baza și exponentul au limite finite, iar baza limită este pozitivă).

2. Calcule posibile cu ±∞ Partea 2

Când cel puțin una dintre limite este infinită, rezultatul se citește din tabelul de mai jos. Aici $a, b \in \mathbb{R}$ sunt limite finite, iar 0_+ (0_-) înseamnă limita 0, cu termeni pozitivi (negativi) de la un rang încolo.

Operația	Calcule posibile
Adunare	$a + (+\infty) = +\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
Înmulțire	$a \cdot (+\infty) = +\infty$ și $a \cdot (-\infty) = -\infty$, dacă $a > 0$ $a \cdot (+\infty) = -\infty$ și $a \cdot (-\infty) = +\infty$, dacă $a < 0$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

Operația	Calcule posibile
Împărțire	$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$ $\frac{+\infty}{a} = +\infty$, dacă $a > 0$; $\frac{+\infty}{a} = -\infty$, dacă $a < 0$ $\frac{a}{0_+} = +\infty$ și $\frac{a}{0_-} = -\infty$, dacă $a > 0$ (invers, dacă $a < 0$) $\frac{+\infty}{0_+} = +\infty$, $\frac{+\infty}{0_-} = -\infty$
Puteri (baza pozitivă)	$a^{+\infty} = +\infty$, dacă $a > 1$; $a^{+\infty} = 0$, dacă $0 < a < 1$ $a^{-\infty} = 0$, dacă $a > 1$; $a^{-\infty} = +\infty$, dacă $0 < a < 1$ $(+\infty)^b = +\infty$, dacă $b > 0$; $(+\infty)^b = 0$, dacă $b < 0$ $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$, $0_+^{+\infty} = 0$, $0_+^{-\infty} = +\infty$
Radicali	$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ $\sqrt[k]{-\infty} = -\infty$, pentru k impar

DE REȚINUT

- La adunare, un număr finit „nu contează” lângă $\pm\infty$.
- La înmulțire și la împărțire, rezultatul se stabilește cu regula semnelor.
- La $\frac{a}{0}$, cu $a \neq 0$, trebuie aflat semnul numitorului: $\frac{1}{0}$ fără semn nu are sens.

EXEMPLUL 2 · FORME DETERMINATE

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+5) = +\infty$ (forma $+\infty + 5$).

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3}{n+1} = 0$ (forma $\frac{-3}{+\infty}$).

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(2-n)\cdot 3^n = -\infty$ (forma $(-\infty)\cdot(+\infty)$).

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$ (forma $2^{+\infty}$), dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = 0$ (forma $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}$).

3. Cazuri de nedeterminare Partea 3

DEFINIȚIE

Un **caz de nedeterminare** (caz exceptat) este o formă pentru care regulile de calcul nu dau rezultatul. Sunt șapte:

$$\infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

Rezultatul depinde de șirurile concrete. Transformi expresia până ajungi la o formă din tabelul de la punctul 2.

Cazurile 1^∞, ∞^0 și 0^0 apar la puteri cu baza și exponentul variabile. Ele se rezolvă cu ajutorul numărului e.

EXEMPLUL 3 · DE CE $\infty - \infty$ NU ESTE 0

Toate diferențele de mai jos au forma $\infty - \infty$, dar rezultatele diferă:

- $(n+3) - n = 3 \to 3$
- $n^2 - n = n(n-1) \to +\infty$
- $n - n^2 = n(1-n) \to -\infty$
- $(n + (-1)^n) - n = (-1)^n$, care nu are limită.

Forma	Unde apare	Cum transformi
$\infty - \infty$	polinoame; diferențe de radicali; diferențe de fracții	factor comun forțat; amplific cu conjugatul; aduc la același numitor
$\frac{\infty}{\infty}$	rapoarte de polinoame, de radicali sau de exponențiale	dau factor comun forțat termenul dominant, sus și jos
$0 \cdot \infty$	produse	scriu produsul ca un cât sau îl efectuez
$\frac{0}{0}$	câturi de șiruri cu limita 0	simplific; amplific cu conjugatul; înmulțesc sus și jos cu o putere a lui n
1^∞, ∞^0, 0^0	puteri cu baza și exponentul variabile	cu ajutorul numărului e

ATENȚIE · GREȘELI FRECVENTE

- $\infty - \infty$ nu este 0, $\frac{\infty}{\infty}$ nu este 1, $0 \cdot \infty$ nu este 0, iar 1^∞ nu este 1.
- În schimb, $(+\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) \cdot (+\infty)$, $(+\infty)^{+\infty}$ și $0_+^{+\infty}$ **nu** sunt cazuri de nedeterminare.
- Înainte de orice calcul, scrie ce formă ai. Dacă este caz de nedeterminare, transformi.

4. Limite fundamentale Partea 4

DE REȚINUT

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$, dacă $\alpha > 0$, și $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$, dacă $\alpha < 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.
- Șirul putere:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & q \in (-1;1) \\ \text{nu există}, & q \le -1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, pentru $a > 0$: exponentul $\frac{1}{n}$ tinde la 0, deci $a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$.
- Dacă (a_n) este mărginit și $b_n \to 0$, atunci $a_n b_n \to 0$ (criteriul majorării).

EXEMPLUL 4 · ȘIRUL PUTERE

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, pentru că $\frac{2}{3} \in (-1;1)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ nu există, pentru că $-\frac{5}{4} \le -1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{0{,}9^n} = +\infty$: numitorul tinde la 0_+ (forma $\frac{1}{0_+}$).

5. Polinoame și rapoarte de polinoame Partea 5

★ Metodă **Factor comun forțat**

1	Găsesc puterea cea mai mare a lui n (gradul), la numărător și la numitor.
2	Dau factor comun forțat această putere: $3n^2 - 5n + 2 = n^2\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$.
3	În paranteză, toți termenii în afară de primul tind la 0. Paranteza tinde la coeficientul dominant.
4	Simplific (la un raport) și citesc rezultatul cu regulile de calcul.

DE REȚINUT

Pentru $a_k \neq 0$ și $k \geq 1$: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0) = a_k \cdot (+\infty)$, adică $+\infty$, dacă $a_k > 0$, și $-\infty$, dacă $a_k < 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{b_p n^p + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, & k < p \\ \dfrac{a_k}{b_p}, & k = p \\ \dfrac{a_k}{b_p} \cdot (+\infty), & k > p \end{cases}$$

Pe scurt: compari gradele. La grade egale, limita este raportul coeficienților dominanți.

EXEMPLUL 5 · POLINOAME

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3 - 5n^2 + 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n - n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{n} - 1\right) = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty$. Forma era $\infty - \infty$.

EXEMPLUL 6 · RAPOARTE DE POLINOAME

a) Grade egale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 4}{5n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(5 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3}{5}$$

b) Gradul de sus este mai mic: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+7}{2n^2+3} = 0$.

c) Gradul de sus este mai mare: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-4n^3}{n^2+6n} = \frac{-4}{1}\cdot(+\infty) = -\infty$.

ATENȚIE · GRADUL CU PARANTEZE ȘI RADICALI

- $(2n-1)^3$ are gradul 3 și coeficientul dominant $2^3 = 8$. Nu e nevoie să desfaci paranteza.
- $\sqrt{4n^2+n} = n\sqrt{4+\frac{1}{n}}$ „se poartă ca” $2n$: are gradul 1 și coeficientul 2. La fel, $\sqrt[3]{8n^3+1}$ se poartă ca $2n$.
- $\sqrt{n}$ are gradul $\frac{1}{2}$, iar $n\sqrt{n}$ are gradul $\frac{3}{2}$.

EXEMPLUL 7 · RAPORT CU RADICALI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \frac{2+1}{3} = 1$$

6. Exponențiale Partea 6

★ Metodă **Împart la termenul dominant**

1. Scriu toate puterile cu exponentul n: $5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$, $2^{2n} = 4^n$, $3^{n-1} = \frac{3^n}{3}$.
2. Aleg puterea cu baza cea mai mare (în modul).
3. Dau factor comun forțat această putere, sus și jos.
4. Rapoartele care rămân au forma q^n, cu $|q| < 1$, deci tind la 0.

EXEMPLUL 8 · RAPORT DE EXPONENȚIALE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 3^n}{4 \cdot 5^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(2 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(4 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \frac{2+0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

EXEMPLUL 9 · DIFERENȚĂ DE EXPONENȚIALE

Forma $\infty - \infty$: $\lim_{n\to\infty} (3^n - 2^n) = \lim_{n\to\infty} 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$.

ATENȚIE · BAZE NEGATIVE

$(-2)^n$ nu are limită, dar $\frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. La baze negative compari modulele bazelor.

7. Radicali: diferențe și conjugatul Partea 7

★ Metodă **Amplific cu conjugatul**

1. Verific dacă este cu adevărat $\infty - \infty$ „strâns”: compar coeficienții dominanți ($\sqrt{n^2 + 3n}$ se poartă ca n).
2. Dacă coeficienții dominanți diferă, dau factor comun forțat n și am terminat.
3. Dacă sunt egali, amplific cu conjugatul: $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$. Sus, termenii dominanți se reduc.
4. Obțin forma $\frac{\infty}{\infty}$ și dau factor comun forțat n, sus și jos.

DE REȚINUT · FORMULE CU CONJUGATUL

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$$

$$\sqrt[3]{A}-B=\frac{A-B^3}{\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2}$$

EXEMPLUL 10 · PAS CU PAS

Calculează $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$.

Pașii 1–2. Forma $\infty-\infty$; $\sqrt{n^2+4n}$ se poartă ca n: coeficienții sunt egali.

Pasul 3. $\sqrt{n^2+4n}-n=\dfrac{n^2+4n-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

Pasul 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}=\dfrac{4}{1+1}=2$

EXEMPLUL 11 · DOI RADICALI

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=0$ (forma $\frac{3}{+\infty}$).

EXEMPLUL 12 · COEFICIENȚI DIFERIȚI

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-2\right)=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$. Nu a fost nevoie de conjugat.

8. Sume cu n termeni și șiruri mărginite Partea 8

ATENȚIE · CÂȚI TERMENI ARE SUMA?

Regulile de calcul sunt pentru un număr **fix** de termeni. Suma $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$, cu n termeni, este egală cu 1, deși fiecare termen tinde la 0. Întâi calculezi suma (o scrii fără „…”), apoi limita.

DE REȚINUT · SUME UTILE

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\quad q\neq 1$$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

EXEMPLUL 13 · SUMĂ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

EXEMPLUL 14 · MĂRGINIT ORI ȘIR CU LIMITA 0

a) $\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}\to 0$, deci $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\cos n}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$, pentru că $\frac{\cos n}{n}\to 0$.

ATENȚIE · AMBELE ȘIRURI TREBUIE SĂ AIBĂ LIMITĂ

Regulile de calcul cer ca ambele șiruri să aibă limită. Șirul $(\sin n)$ nu are limită, deci nu poți scrie $\lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$. Folosești criteriul majorării.

Schemă recapitulativă: ce fac după forma șirului

Cum arată șirul	Forma	Ce fac
polinom în n	$\infty-\infty$	factor comun forțat puterea cea mai mare
raport de polinoame sau de radicali	$\frac{\infty}{\infty}$	compar gradele; factor comun forțat sus și jos
raport de exponențiale	$\frac{\infty}{\infty}$	împart la puterea cu baza cea mai mare
diferență cu radicali, coeficienți dominanți egali	$\infty-\infty$	amplific cu conjugatul
diferență cu radicali, coeficienți dominanți diferiți	$\infty-\infty$	factor comun forțat n
diferență de fracții	$\infty-\infty$	aduc la același numitor

Cum arată șirul	Forma	Ce fac
sumă cu n termeni	—	calculez întâi suma
mărginit ori șir cu limita 0	—	criteriul majorării

★ Cel mai important **Firul logic: cum calculezi o limită de șir**

Urmează pașii în această ordine, la fiecare problemă

1	Înlocuiesc în gând fiecare bucată cu limita ei și scriu forma obținută.
2	Dacă forma este în tabelul de calcule posibile, scriu direct rezultatul.
3	Dacă este caz de nedeterminare, recunosc tipul șirului (schema de mai sus).
4	Transform: factor comun forțat, împărțire la termenul dominant, conjugat sau calculul sumei.
5	Scriu din nou forma: acum trebuie să fie determinată.
6	Verific semnul și, dacă pot, valoarea pentru un n mare.

II Probleme pe niveluri

La fiecare limită scrie întâi forma (de exemplu $\frac{\infty}{\infty}$), apoi transformarea pe care o faci.

Nivel de bază

1. Stabilește dacă forma este caz de nedeterminare. Dacă nu este, scrie rezultatul:

a) $(+\infty)+(+\infty)$ b) $(+\infty)-(+\infty)$ c) $0\cdot(+\infty)$ d) $\dfrac{5}{+\infty}$

e) $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ f) $(-3)\cdot(+\infty)$ g) $1^{+\infty}$ h) $3^{+\infty}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}$ j) $\dfrac{-2}{0_+}$ k) $(+\infty)^0$ l) $0_+^{+\infty}$

2. Calculează (formele sunt determinate):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9+\dfrac{5}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+\dfrac{1}{n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}(5-n^3)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+2\right]$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7}{n^2+1}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^n$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right)^n$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+n^2)$

3. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-5n^2+2)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n^4+n^3+100n)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n-n^2)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}[(2n+1)^2-4n^2]$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^3-n^3]$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n-2)^3-(n+1)^3]$

4. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n}{2n^2-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n^2+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-1}{1-n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^2}{4n^2+n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-2n)^3}{n^3+2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n}{3n+1}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3}$

5. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^n-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+4^n}{5^n+3^n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{4^n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^n}{2^{2n+1}+1}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-3)^n}{5^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-4^n)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n}{2^n+3^n}$

6. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-2n}\right)$

Nivel consolidat

7. Calculează întâi suma, apoi limita:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2+n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

8. Calculează (compară gradele):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+n}+2n}{n+5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{4n+3}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n}-n}{2n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}+1}{2n^2+1}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+3}}{\sqrt{n^2+5}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+n}}{n+1}$

9. Calculează, folosind criteriul majorării unde este nevoie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n}{n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+\sin n}{n+2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+(-1)^n}{2^n}$

10. Parametri.

a) Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+1}{2n^2+5} = 3$.

b) Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(a-1)n^3+n}{n^2+1}$ este finită.

c) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an^2+n}{n+1}$, discutând după $a \in \mathbb{R}$.

11. Calculează, discutând după $a > 0$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+2^n}{3^n+2^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n+1}+2^n}{a^n+2^{n+1}}$

12. Adevărat sau fals? Pentru fals, dă un contraexemplu.

a) Dacă $a_n \to +\infty$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n - b_n \to 0$.

b) Dacă $a_n \to 0$ și (b_n) este mărginit, atunci $a_n b_n \to 0$.

c) Dacă șirul $(a_n + b_n)$ are limită, atunci șirurile (a_n) și (b_n) au limită.

d) Dacă $a_n \to 2$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n b_n \to -\infty$.

e) Dacă $a_n > 0$, $a_n \to 1$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n^{b_n} \to 1$.

f) Dacă $a_n > 0$ și $a_n \to 0$, atunci $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

13. Fie șirul $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$, $n \geq 1$.

a) Arată că $x_n = 6 - \frac{5}{2^{n-1}}$, pentru orice $n \geq 1$.

b) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n(6 - x_n)$. Ce formă avea limita?

14. Cazurile $0 \cdot \infty$ și $\infty - \infty$ cu fracții. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt{n^2+n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-n\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2}{n+2}\right)$

Nivel avansat

15. Calculează (conjugatul pentru radicalul de ordinul 3):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$

Indicație la b): adună și scade n.

16. Calculează:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{3^n}$

17. Determină parametrii reali:

a) a și b, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+an+1}-bn\right)=3$;

b) a și b, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=0$.

18. Calculează cu criteriul cleștelui:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

19. Discută după parametru:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a-1}{2}\right)^n$, $a\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+1}{a^n+2}$, $a>0$.