FIȘĂ DE LUCRU · CLASA A XI-A · MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Puterile unei matrice pătratice

Inducție · Puteri care se repetă · Binomul lui Newton · Relația Hamilton–Cayley · Matrice cu sin și cos · Matrice de tranziție

Întrebarea fișei: Cum calculezi A^{2026}, sau chiar A^n, fără să înmulțești matricea cu ea însăși de 2025 de ori?

METODELE 1–2	METODA 3	METODELE 4–5	PARTEA III
Inducție, puteri care se repetă	Binomul lui Newton	Hamilton–Cayley, matrice cu sin și cos	Matrice în situații practice

0 Pornim de la ce știi

Patru verificări rapide. Dacă una dintre ele îți ridică probleme, notează-o: la ea revii prima.

1. Calculează $A^2 = A \cdot A$ pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Dezvoltă $(x+1)^4$ cu binomul lui Newton.
   Cât este C_5^2?
3. Completează: $\cos(a+b) = \cdots$ și $\sin(a+b) = \cdots$
   Calculează $\cos\frac{2\pi}{3}$ și $\sin\frac{2\pi}{3}$.
4. Află restul împărțirii lui 2026 la 3, la 4 și la 6.

I Teorie pe scurt

Pentru fiecare metodă: când o folosești, pașii (în chenarul gros) și un exemplu rezolvat. La final găsești firul logic care te ajută să alegi metoda.

DEFINIȚIE

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ o matrice pătratică. Puterile lui A se definesc prin $A^1 = A$ și $A^{n+1} = A^n \cdot A$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Prin convenție, $A^0 = I_p$.

DE REȚINUT

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$, $\quad (A^m)^n = A^{mn}$, $\quad (kA)^n = k^n A^n$ pentru orice număr k.

Atenție! Înmulțirea matricelor nu este comutativă. În general $(AB)^n \neq A^n B^n$ și $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, nu $A^2 + 2AB + B^2$.

1. Calculez, intuiesc, demonstrez prin inducție

★ Metodă **Metoda inducției matematice**

1	Calculez A^2, A^3 (dacă e nevoie, și A^4).
2	Observ ce elemente rămân la fel și cum se schimbă celelalte. Scriu forma bănuită a lui A^n ca propoziție $P(n)$.
3	Verific $P(1)$.
4	Presupun $P(k)$ adevărată și calculez $A^{k+1} = A^k \cdot A$. Obțin $P(k+1)$.

EXEMPLUL 1 · INDUCȚIE

Calculează A^n pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pasul 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pasul 2. Pe prima poziție apar puterile lui 2, iar alături un număr cu 1 mai mic. Bănuiesc $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pasul 3. Pentru $n = 1$ obțin $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ ✓.

Pasul 4. $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^k + 2^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓.

2. Puteri care se repetă

Uneori, după câteva înmulțiri, apare o matrice simplă: I_p, $-I_p$, O_p sau chiar A înmulțită cu un număr. Atunci puterile „se repetă” și nu mai ai nevoie de inducție pentru fiecare exercițiu.

★ Metodă **Metoda puterilor care se repetă**

1	Calculez A^2, A^3, … până apare I_p, $-I_p$, O_p sau un multiplu al lui A.
2	Dacă $A^k = I_p$, împart n la k: $n = k \cdot q + r$, cu $0 \le r < k$.
3	Scriu $A^n = (A^k)^q \cdot A^r = A^r$ (cu $A^0 = I_p$).

DE REȚINUT

$A^k = I_p \Rightarrow A^n = A^r$, unde r este restul împărțirii lui n la k.

$A^k = -I_p \Rightarrow A^{2k} = I_p$.

$B^k = O_p \Rightarrow B^n = O_p$, pentru orice $n \ge k$ (matrice **nilpotentă**).

$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$, pentru orice $n \ge 1$.

EXEMPLUL 2 · PUTERILE SE REPETĂ

Calculează A^{2026} pentru $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

$2026 = 3 \cdot 675 + 1$, deci $A^{2026} = (A^3)^{675} \cdot A = A$.

EXEMPLUL 3 · $A^2 = kA$

Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5A$.

Atunci $A^3 = A^2 \cdot A = 5A^2 = 5^2 A$ și, prin inducție, $A^n = 5^{n-1}A$.

3. Binomul lui Newton

Matricea unitate comută cu orice matrice: $I_p \cdot B = B \cdot I_p = B$. De aceea, pentru $A = aI_p + B$ poți folosi binomul lui Newton. Metoda e rapidă când o putere a lui B este O_p: suma se oprește după câțiva termeni.

DE REȚINUT

Dacă $XY = YX$, atunci $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, X^{n-k}Y^k$.

Dacă $A = aI_p + B$ și $B^2 = O_p$, atunci $A^n = a^n I_p + n\,a^{n-1}B$.

Dacă $A = aI_p + B$ și $B^3 = O_p$, atunci $A^n = a^n I_p + n\,a^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}B^2$.

★ Metodă **Metoda binomului lui Newton**

1	Scriu $A = aI_p + B$. De obicei, a este numărul care se repetă pe diagonala principală.
2	Calculez B^2, B^3, … până obțin O_p.
3	Aplic binomul lui Newton. Termenii care conțin $B^k = O_p$ dispar.
4	Adun matricele rămase și verific formula pentru $n = 1$.

EXEMPLUL 4 · BINOMUL LUI NEWTON

Calculează A^n pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$A = 3I_3 + B$, cu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = O_3$.

$$A^n = 3^n I_3 + n \cdot 3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2}B^2 = \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Verificare: pentru $n = 1$ obțin chiar A ✓.

ATENȚIE

Binomul lui Newton se aplică numai matricelor care comută. Pentru $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem $XY \neq YX$. Verifică singur că $(X+Y)^2 \neq X^2 + 2XY + Y^2$.

4. Relația Hamilton–Cayley (matrice de ordinul 2)

Orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația de mai jos. Numărul $a + d$ este suma elementelor de pe diagonala principală (**urma** matricei). Numărul $ad - bc$ este produsul elementelor de pe diagonala principală minus produsul celor de pe diagonala secundară.

DE REȚINUT

$$A^2 - (a+d)\,A + (ad-bc)\,I_2 = O_2$$

Cu $s = a+d$ și $p = ad-bc$: $A^2 = s\,A - p\,I_2$. Demonstrația este un calcul direct: o faci tu, la exercițiul 5.

Din relație, orice putere a lui A se scrie $A^n = x_n A + y_n I_2$. Înmulțind cu A și înlocuind A^2:

$$A^{n+1} = x_n A^2 + y_n A = (s\,x_n + y_n)\,A - p\,x_n\,I_2$$

Deci $x_{n+1} = s\,x_n + y_n$, $y_{n+1} = -p\,x_n$, adică $x_{n+2} = s\,x_{n+1} - p\,x_n$: o **recurență liniară de ordinul 2**, ca în fișa despre șiruri date prin recurențe. Ecuația ei caracteristică, $r^2 - s\,r + p = 0$, are aceiași coeficienți ca relația Hamilton–Cayley.

★ Metodă **Metoda relației Hamilton–Cayley**

1	Calculez $s = a+d$, $p = ad-bc$ și scriu $A^2 = s\,A - p\,I_2$.
2	Caut cazurile simple. Dacă $p = 0$: $A^2 = sA$, deci $A^n = s^{n-1}A$ (metoda 2). Dacă $s^2 = 4p$: $\left(A - \frac{s}{2}I_2\right)^2 = O_2$ (metoda 3).
3	Altfel, scriu $A^n = x_n A + y_n I_2$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = s$ și $x_{n+2} = s\,x_{n+1} - p\,x_n$.
4	Rezolv recurența, scriu $y_n = -p\,x_{n-1}$ și verific formula pentru $n = 1$ și $n = 2$.

EXEMPLUL 5 · HAMILTON–CAYLEY

Calculează A^3 și A^n pentru $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pasul 1. $s = 4+1 = 5$, $p = 4\cdot 1 - (-2)\cdot 1 = 6$, deci $A^2 = 5A - 6I_2$. Atunci $A^3 = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6I_2) - 6A = 19A - 30I_2$.

Pașii 2–3. $p \neq 0$ și $s^2 \neq 4p$. Scriu $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Pasul 4. $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, deci $x_n = 3^n - 2^n$ și $y_n = -6x_{n-1} = 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$.

$$A^n = (3^n - 2^n)\,A + (3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n)\,I_2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

Verificare: $x_3 = 27 - 8 = 19$ și $y_3 = 24 - 54 = -30$, la fel ca la Pasul 1 ✓.

5. Matrice cu sin și cos

DEFINIȚIE

Pentru $t \in \mathbb{R}$ notăm $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Înmulțirea cu $R(t)$ rotește un punct din plan în jurul originii cu unghiul t (o **matrice de rotație**).

DE REȚINUT

$R(t)\cdot R(u) = R(t+u)$: rezultă din formulele pentru $\cos(t+u)$ și $\sin(t+u)$.

$R(t)^n = R(nt)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (prin inducție). În particular $R(\pi) = -I_2$ și $R(2\pi) = I_2$.

Matrice reductibile la $R(t)$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a,b) \neq (0,0)$, și $r = \sqrt{a^2+b^2}$, atunci $A = r\begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix} = r\,R(t)$, cu $\cos t = \frac{a}{r}$, $\sin t = \frac{b}{r}$. Deci $A^n = r^n\,R(nt)$.

Este aceeași idee ca la forma trigonometrică a numărului complex $a + bi = r(\cos t + i\sin t)$.

★ Metodă **Metoda matricelor de rotație**

1	Verific forma: pe diagonala principală același număr a, pe cealaltă diagonală $-b$ (sus) și b (jos).
2	Calculez $r=\sqrt{a^2+b^2}$ și dau factor comun r.
3	Găsesc t cu $\cos t=\frac{a}{r}$ și $\sin t=\frac{b}{r}$.
4	Scriu $A^n=r^n\,R(nt)$ și reduc unghiul nt la un unghi din $[0,2\pi)$.

EXEMPLUL 6 · MATRICE DE ROTAȚIE

Calculează A^6 și A^{2026} pentru $A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$.

$r=\sqrt{1+3}=2$, $\cos t=\frac{1}{2}$, $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $t=\frac{\pi}{3}$ și $A=2R\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$A^n=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3}\\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$, deci $A^6=2^6R(2\pi)=64\,I_2$.

$2026=6\cdot 337+4$, deci $A^{2026}=2^{2026}R\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2^{2026}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2^{2025}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$.

★ Cel mai important **Cum aleg metoda? Începe mereu cu A^2: de cele mai multe ori îți arată drumul.**

1	Calculez A^2 (eventual A^3). Apare I_p, $-I_p$, O_p sau kA? → puteri care se repetă.
2	Pe diagonala principală se repetă același număr a, iar $B=A-aI_p$ are $B^2=O_p$ sau $B^3=O_p$? → binomul lui Newton.
3	Matricea are forma $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$? → $A=r\,R(t)$ și $A^n=r^n\,R(nt)$.
4	Altă matrice de ordinul 2? → relația Hamilton–Cayley.
5	În A^2, A^3 se vede un model clar? → intuiesc forma lui A^n și o demonstrez prin inducție.

II Exerciții

Lucrează în ordine. La fiecare exercițiu, scrie mai întâi ce metodă alegi și de ce.

Nivel de bază

5. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Calculează A^2 și $(a+d)A$, apoi arată că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

6. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculează A^2 și A^3.

b) Intuiește forma lui A^n și demonstreaz-o prin inducție matematică.

c) Calculează A^{10}.

7. Fie matricea diagonală $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculează A^5.

8. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculează A^2 și arată că $A^4 = I_2$.

b) Calculează A^{2026} și A^{2027}.

9. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Arată că $A^2 = A$.

b) Calculează A^{2026} și suma $A + A^2 + \cdots + A^{10}$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Determină numărul real k pentru care $A^2 = kA$.

b) Calculează A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, și apoi A^3.

11. Fie $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculează B^2 și B^3. Cât este B^{2026}?

12. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Scrie $A = 2I_2 + B$ și calculează B^2.

b) Calculează A^n cu binomul lui Newton.

c) Calculează A^5.

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Scrie relația Hamilton–Cayley pentru A.

b) Determină numerele reale x și y pentru care $A^3 = xA + yI_2$.

c) Calculează A^3.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Găsește $t \in [0,2\pi)$ pentru care $A = R(t)$.

b) Calculează A^3 și A^6.

c) Care este cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^n = I_2$?

15. Adevărat sau fals? Pentru fiecare propoziție falsă, dă un contraexemplu din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Dacă $A^2 = O_2$, atunci $A = O_2$.

b) $(A + I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, A^k$, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $(AB)^2 = A^2B^2$, pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

d) Dacă $A^3 = I_2$, atunci $A^{2027} = A^2$.

Nivel consolidat

16. Fie $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Scrie $A=I_3+B$ și calculează B^2 și B^3.

b) Arată că $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculează A^{10}.

17. Fie $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

a) Scrie relația Hamilton–Cayley pentru A și arată că $(A-2I_2)^2=O_2$.

b) Calculează A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculează A^4 în două moduri: cu formula de la b) și ca $A^2\cdot A^2$.

18. Fie $A=\begin{pmatrix}5&-6\\3&-4\end{pmatrix}$.

a) Arată că $A^2=A+2I_2$.

b) Scrie $A^n=x_nA+y_nI_2$ și arată că $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$.

c) Determină x_n, y_n și A^n.

d) Calculează A^5.

19. ***Activitate pe grupe · Aceeași matrice, trei drumuri.***

Fie $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$. Clasa se împarte în trei grupe.

Grupa 1: calculează A^2 și A^4 și folosește puterile care se repetă.

Grupa 2: scrie relația Hamilton–Cayley și exprimă A^3 și A^4 în funcție de A și I_2.

Grupa 3: scrie $A=\sqrt{2}\,R(t)$ și folosește $R(t)^n=R(nt)$.

a) Toate grupele: calculează A^8.

b) Arată că $A^{2026}=2^m\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și află numărul natural m.

c) Comparați rezolvările: care drum a fost cel mai scurt? Ce drum ați alege pentru A^{2027}?

20. Fie $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

a) Găsește $t\in(-\pi,\pi]$ pentru care $A=2R(t)$. Atenție la semne!

b) Calculează A^6 și A^{12}.

c) Care este cel mai mic $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $A^n=k\,I_2$, cu k număr real?

21. ***Găsește greșeala.***

Un elev scrie: „$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=2I_2+B$, cu $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, deci $A^n=2^nI_2+n\cdot 2^{n-1}B$.”

a) Verifică formula elevului pentru $n=2$. Unde a greșit?

b) Calculează B^2 și reia calculul cu binomul lui Newton, grupând separat termenii cu $B^k=I_2$ și pe cei cu $B^k=B$. *Indicație:* $3^n=(2+1)^n$ și $1=(2-1)^n$.

c) Arată că $A^n=\frac{3^n+1}{2}\,I_2+\frac{3^n-1}{2}\,B$ și calculează A^4.

22. Fie $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arată că $J^2 = 3J$ și dedu că $J^k = 3^{k-1}J$, pentru $k \geq 1$.

b) Folosind binomul lui Newton, arată că $(I_3 + J)^n = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J$.

c) Calculează $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

Nivel avansat

23. Pentru $x \in \mathbb{R}$ fie $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arată că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Dedu $(M(x))^n$ și calculează $(M(1))^{10}$.

c) Calculează produsul $M(1) \cdot M(2) \cdot \ldots \cdot M(10)$.

24. Șirul lui Fibonacci este definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrează prin inducție că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculează A^{10}.

c) Folosind $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$, arată că $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

25. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^3 = O_2$, iar s și p numerele din relația Hamilton–Cayley, $A^2 = sA - pI_2$.

a) Arată că $A^3 = (s^2 - p)\,A - sp\,I_2$.

b) Arată că $A^2 = O_2$. *Indicație:* tratează separat cazul $A = k\,I_2$.

26. Câte matrice distincte are mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ pentru fiecare dintre matricele de mai jos?

a) $A = R\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (din Exemplul 2)

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. ***Formulează tu.***

Lucrați în perechi.

a) Găsește o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $B \neq O_2$, cu $B^2 = O_2$.

b) Construiește cu ea o matrice $A = aI_2 + B$ și scrie pentru colegul de bancă un exercițiu ca exercițiul 12. Rezolvă-l și tu, apoi schimbați caietele și comparați rezolvările.

III Matrice în situații practice

Situațiile sunt inventate, dar seamănă cu cele reale. Treci datele dintr-un tabel într-o matrice și folosești puterile ei ca să prezici ce urmează.

28. ***Biciclete de închiriat.***

O firmă are 100 de biciclete și două stații: Centru (C) și Parc (P). Luni dimineața toate bicicletele sunt în C. În fiecare zi, din bicicletele aflate dimineața în C, 80% ajung seara tot în C și 20% în P. Din cele aflate în P, 30% ajung în C și 70% rămân în P. Nu se pierde nicio bicicletă și nu se adaugă altele.

ajung în \ pleacă din	C	P
C	0,8	0,3

P	0,2	0,7

a) Scrie matricea de tranziție T din tabel. Ce înseamnă elementul $0{,}3$? Ce observi la suma elementelor de pe fiecare coloană?

b) Notăm cu $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \end{pmatrix}$ numărul de biciclete din C și din P după n zile, $X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$. Arată că $X_{n+1} = T\,X_n$ și dedu că $X_n = T^n X_0$.

c) Calculează X_1, X_2 și X_3.

d) Scrie relația Hamilton–Cayley pentru T, determină T^n și arată că $c_n = 60 + \frac{40}{2^n}$.

e) Ce se întâmplă cu numărul de biciclete din fiecare stație după foarte multe zile? Câte biciclete ar trebui să fie în C și în P pentru ca numărul lor să nu se mai schimbe de la o zi la alta?

29. *Nava din joc.*

Într-un joc pe calculator, o navă pornește din punctul $(1{,}0)$. La fiecare apăsare a unei taste, nava se rotește în jurul originii cu $30°$, în sens trigonometric. După n apăsări, coordonatele ei sunt $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) După câte apăsări ajunge nava prima dată înapoi în punctul de plecare?

b) Unde se află nava după 2026 de apăsări?

c) Programatorul vrea ca, la fiecare apăsare, nava să se și depărteze de origine: distanța până la origine se dublează. Ce matrice A trebuie să folosească în loc de $R\left(\frac{\pi}{6}\right)$?