Șiruri. Noțiuni introductive

Fișă de lucru – clasa a IX-a

Numele și prenumele: …… Data: ……

La finalul fișei voi ști să:

- recunosc un șir și îi calculez termenii;
- trec de la un mod de definire a unui șir la altul;
- lucrez cu șirul sumelor parțiale;
- aflu termenul general pentru recurențe de forma $x_n = x_{n-1} + f(n)$ și $x_n = x_{n-1} \cdot f(n)$;
- stabilesc monotonia unui șir cu diferența, cu raportul sau prin inducție.

1. Ce este un șir

Definiție. Un **șir de numere reale** este o funcție $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Notăm $a_n = f(n)$.

- n este **rangul** (indicele) termenului.
- a_n este **termenul de rang** n, numit și **termenul general**.
- Scriem șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ sau, pe scurt, $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots$

Rangul n este întotdeauna un număr natural. Termenul a_n poate fi orice număr real.

Uneori numerotarea începe de la 0: scriem atunci $(a_n)_{n\geq 0}$.

Atenție! Ordinea termenilor contează. Șirurile $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$ și $2;\ 1;\ 4;\ 3;\ \ldots$ sunt diferite.

2. Moduri de definire a unui șir

Același șir poate fi dat în mai multe feluri. Iată șirul $3;\ 9;\ 19;\ 33;\ 51;\ \ldots$ scris în cinci moduri:

Modul	Cum arată	La ce e bun
În cuvinte (descriptiv)	„fiecare termen este cu 1 mai mare decât dublul pătratului rangului său”	spune regula pe înțeles
Prin enumerarea primilor termeni	$3;\ 9;\ 19;\ 33;\ 51;\ \ldots$	arată cum „începe” șirul
Prin formula termenului general	$a_n = 2n^2 + 1;\ n \geq 1$	calculăm direct orice termen: $a_{10} = 201$
Printr-o relație de recurență	$a_1 = 3;\ a_n = a_{n-1} + 4n - 2;\ n \geq 2$	fiecare termen se obține din cel dinainte

Modul	Cum arată	La ce e bun
Prin tabel sau grafic	punctele $(1; 3);\ (2; 9);\ (3; 19);\ \ldots$	vedem cum variază șirul

De reținut

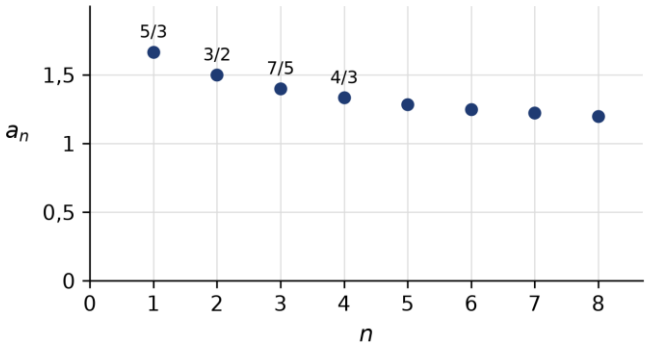
- La o relație de recurență trebuie dat și **primul termen**. Fără el, șirul nu este bine definit.
- Graficul unui șir este format din **puncte izolate** $(n;\ a_n)$. Nu le unim cu o linie.
- Câțiva termeni nu determină singuri șirul. Din enumerare găsim **o formulă posibilă**, pe care o verificăm pe termenii dați.

Exemplul 1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{n+4}{n+2}$.

a) Primii patru termeni: $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{7}{5}$, $a_4 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

b) Este $\frac{13}{12}$ termen al șirului? Rezolvăm $\frac{n+4}{n+2} = \frac{13}{12}$: $12n + 48 = 13n + 26$, deci $n = 22$. Da, $\frac{13}{12} = a_{22}$.

c) Graficul: punctele $(n;\ a_n)$ pentru $n = 1;\ 2;\ \ldots;\ 8$.



3. Șirul sumelor parțiale

Pentru un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ notăm

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ se numește **șirul sumelor parțiale**.

- $S_1 = a_1$ și $S_n = S_{n-1} + a_n$, pentru $n \geq 2$.
- Invers, dacă știm S_n: $a_1 = S_1$ și $a_n = S_n - S_{n-1}$, pentru $n \geq 2$.

Atenție! Formula $a_n = S_n - S_{n-1}$ nu se aplică pentru $n = 1$. Verificăm separat dacă formula găsită dă și termenul a_1.

Exemplul 2. Suma primilor n termeni ai unui șir este $S_n = n^2 + 3n$. Aflăm a_n.

- $a_1 = S_1 = 1 + 3 = 4$.
- Pentru $n \geq 2$: $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1) = 2n + 2$.
- Pentru $n = 1$, formula dă $2 \cdot 1 + 2 = 4 = a_1$. Deci $a_n = 2n + 2$ pentru orice $n \geq 1$.

4. Termenul general din relații de recurență

4.1. Recurențe de forma $x_n = x_{n-1} + f(n)$

Metoda (adunăm relațiile)

1. Scriem relația pentru $n = 2;\ 3;\ \ldots;\ n$:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(2) \\ x_3 &= x_2 + f(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n) \end{aligned}$$

2. Adunăm relațiile membru cu membru. Termenii $x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_{n-1}$ apar în ambii membri și se reduc.
3. Rămâne $x_n = x_1 + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$. Calculăm suma cu sumele cunoscute.
4. Verificăm formula pe x_1 și x_2.

Exemplul 3. $x_1 = 1$ și $x_n = x_{n-1} + 6n - 5$, pentru $n \geq 2$.

Adunând relațiile: $x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}(6k - 5)$. Pentru $k = 1$, termenul $6k - 5$ este tocmai $1 = x_1$, deci

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(6k - 5) = 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 5n = 3n^2 - 2n.$$

Verificare: $x_1 = 3 - 2 = 1$ și $x_2 = 1 + 7 = 8 = 12 - 4$. ✓

4.2. Recurențe de forma $x_n = x_{n-1} \cdot f(n)$

Metoda (înmulțim relațiile)

1. Scriem relația pentru $n = 2;\ 3;\ \ldots;\ n$: $x_2 = x_1 \cdot f(2)$, $x_3 = x_2 \cdot f(3)$, …, $x_n = x_{n-1} \cdot f(n)$.
2. Înmulțim relațiile membru cu membru. Simplificăm cu $x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_{n-1}$ (sunt nenuli).
3. Rămâne $x_n = x_1 \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n)$. Fracțiile se simplifică „în lanț”.
4. Verificăm formula pe x_1 și x_2.

Exemplul 4. $x_1 = 1$ și $x_n = \frac{2n}{n+1} \cdot x_{n-1}$, pentru $n \geq 2$.

$$x_n = 1 \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot n}{n+1}.$$

Factorul 2 apare de $n - 1$ ori. Fracțiile $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1}$ se simplifică „în lanț” și rămâne $\frac{2}{n+1}$.

Deci

$$x_n = 2^{n-1} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}.$$

Verificare: $x_1 = \frac{2}{2} = 1$ și $x_2 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} = \frac{2^2}{3}$. ✓

5. Monotonia unui șir

Definiție. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este:

- **strict crescător**, dacă $a_n < a_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$;
- **crescător**, dacă $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$;
- **strict descrescător**, dacă $a_n > a_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$;
- **descrescător**, dacă $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$.

Un șir crescător sau descrescător se numește **monoton**.

Este monotonia funcției $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. La șiruri este suficient să comparăm **doi termeni consecutivi**.

Un șir este **nemonoton** dacă găsim trei termeni care „urcă și apoi coboară” (sau invers). De exemplu, $a_1 < a_2$ și $a_2 > a_3$.

De reținut: trei metode

1. **Diferența.** Calculăm $a_{n+1} - a_n$, o aducem la o formă simplă și îi studiem semnul. Dacă $a_{n+1} - a_n > 0$ pentru orice n, șirul este strict crescător. Dacă $a_{n+1} - a_n < 0$ pentru orice n, șirul este strict descrescător.
2. **Raportul.** Se folosește **numai dacă toți termenii sunt strict pozitivi**. Comparăm $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ cu 1. Dacă raportul este mai mare decât 1, șirul este strict crescător. Dacă este mai mic decât 1, șirul este strict descrescător. Metoda e potrivită când a_n conține puteri sau produse.
3. **Inducția.** Se folosește când șirul este dat prin recurență $x_{n+1} = g(x_n)$. Verificăm $x_1 < x_2$ (sau $x_1 > x_2$). Arătăm că din $x_k < x_{k+1}$ rezultă $x_{k+1} < x_{k+2}$.

Exemplul 5.

a) **Diferența.** $a_n = \frac{4n+1}{n+2}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2} = \frac{(4n+5)(n+2) - (4n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{4n^2 + 13n + 10 - 4n^2 - 13n - 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Șirul este strict crescător.

b) **Raportul.** Șirul din Exemplul 4: $x_n = \frac{2^n}{n+1}$. Toți termenii sunt strict pozitivi.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2^n} = \frac{2n+2}{n+2} > 1,$$

pentru că $2n + 2 > n + 2$ pentru orice $n \geq 1$. Șirul este strict crescător.

c) **Inducția.** $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n+6}{3}$, pentru $n \geq 1$. Arătăm că $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$.

- Verificare: $x_2 = \frac{7}{3} > 1 = x_1$.
- Pasul de inducție: presupunem $x_k < x_{k+1}$. Atunci $x_k + 6 < x_{k+1} + 6$, deci

$$\frac{x_k + 6}{3} < \frac{x_{k+1} + 6}{3}, \text{ adică } x_{k+1} < x_{k+2}.$$

Conform principiului inducției matematice, șirul este strict crescător.

Exerciții

Nivel de bază

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$.
   a) Calculați a_1, a_2, a_3 și a_4.
   b) Arătați că $\frac{13}{9}$ este termen al șirului și aflați-i rangul.
   c) Este numărul 2 termen al șirului? Justificați.
2. Scrieți primii cinci termeni ai fiecărui șir:
   a) șirul numerelor prime, în ordine crescătoare;
   b) șirul pătratelor perfecte nenule, în ordine crescătoare;
   c) șirul $(r_n)_{n\geq 1}$, unde r_n este restul împărțirii lui n la 3.
3. Găsiți o formulă posibilă pentru termenul general, $n \geq 1$:
   a) $3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots$
   b) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots$
   c) $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots$
   d) $0;\ 3;\ 8;\ 15;\ 24;\ \ldots$
   e) $\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ \ldots$
4. Relații de recurență.
   a) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 2x_n - 1$, pentru $n \geq 1$. Calculați x_2, x_3, x_4 și x_5.
   b) Primii termeni ai unui șir sunt $1;\ 4;\ 13;\ 40;\ 121$. Găsiți o relație de recurență de forma $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ care îi generează.

   Indicație: comparați fiecare termen cu triplul celui dinainte.
5. Fie șirul $a_n = (-1)^n \cdot (2n-1)$, $n \geq 1$. Scrieți primii cinci termeni, apoi calculați S_1, S_2, S_3, S_4 și S_5.
6. Studiați monotonia șirurilor folosind diferența:
   a) $a_n = 5 - \frac{2}{n}$; b) $b_n = \frac{n+4}{n+1}$.

Nivel consolidat

7. Aflați termenul general a_n al șirului pentru care suma primilor n termeni este:

a) $S_n = 3n^2 - n$; b) $S_n = n^2 + n + 1$.

Indicație: la b) comparați formula obținută pentru $n \geq 2$ cu a_1.

8. Aflați termenul general al șirului:

   a) $x_1 = 2$, $x_n = x_{n-1} + 6n - 2$, pentru $n \geq 2$;

   b) $x_1 = 4$, $x_n = x_{n-1} + 3n^2 + 1$, pentru $n \geq 2$.

   Indicație: folosiți sumele $\sum_{k=1}^{n} k$ și $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

9. Aflați termenul general al șirului:

   a) $x_1 = 1$, $x_n = \frac{n+2}{n-1} \cdot x_{n-1}$, pentru $n \geq 2$;

   b) $x_1 = 4$, $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot x_{n-1}$, pentru $n \geq 2$.

10. Studiați monotonia șirurilor folosind raportul:

    a) $a_n = \frac{n}{3^n}$; b) $b_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)}$.

11. Un videoclip are 10 vizualizări în prima zi după postare. În fiecare zi următoare, numărul vizualizărilor din ziua n este cu $2n$ mai mare decât în ziua precedentă.

    a) Notați cu x_n numărul vizualizărilor din ziua n. Scrieți relația de recurență.

    b) Aflați termenul general x_n. Câte vizualizări are videoclipul în ziua a 10-a?

    c) Câte vizualizări are videoclipul, în total, în primele 10 zile?

12. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are $x_1 = 5$ și $x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{4}$, pentru $n \geq 1$. Arătați prin inducție că șirul este strict descrescător.

Nivel avansat

13. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are $x_1 = 1$ și $x_n = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)} \cdot x_{n-1}$, pentru $n \geq 2$.

    a) Aflați termenul general.

    b) Studiați monotonia șirului.

    Indicație: despărțiți produsul în două „lanțuri”: $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1}$ și $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n+2}$.

14. Fie șirul $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 1$.

    a) Arătați că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ dacă și numai dacă $n^2 - 2n - 1 > 0$.

    b) Calculați a_1, a_2, a_3, a_4. Este șirul monoton? Începând de la ce rang termenii scad?

15. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, pentru $n \geq 1$.

    a) Arătați prin inducție că $x_n < 2$ pentru orice $n \geq 1$.

    b) Arătați prin inducție că șirul este strict crescător.

16. Revenim la șirul de la exercițiul 4 a): $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$.

    a) Comparați termenii x_1; …; x_5 cu puterile lui 2. Intuiți o formulă pentru x_n.

    b) Demonstrați formula prin inducție matematică.

Pentru cei care vor mai mult

17. Determinați numerele reale m pentru care șirul $a_n = \frac{n+m}{2^n}$, $n \geq 1$, este strict descrescător. Ce se întâmplă pentru $m = 0$?

    Indicație: folosiți diferența. De ce nu putem folosi raportul pentru orice m?